ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262
УДК 517.98, 517.968.7

Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах

Елена Юрьевна ГРАЖДАНЦЕВА
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»
664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1

Fundamental operator-function of an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces

Elena Yu. GRAZHDANTSEVA
Irkutsk State University
1 Karla Marksa St., Irkutsk 664003, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается обобщенный интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов, который имеет в своей конструкции обратимый оператор в линейной части, свободной от производных. При исследовании используются ранее полученные результаты в области фундаментальных оператор-функций в банаховых пространствах, а также свойства обобщенных функций, операторов, функционалов. Для интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах получена фундаментальная оператор-функция в терминологии жордановых наборов и выявлены условия существования этой фундаментальной оператор-функции.

Ключевые слова: банахово пространство; обобщенная функция; фундаментальная оператор-функция; жорданов набор

Для цитирования: *Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 249–262. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262.

Abstract. In this paper, we consider a generalized integro-differential operator with derivatives of functionals, which has in its construction an invertible operator in the linear part free of derivatives. The research uses previously obtained results in the field of fundamental operator functions in Banach spaces, as well as the properties of generalized functions, operators, and functionals. For an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces, a fundamental operator-function in the terminology of Jordan sets is obtained and the conditions for the existence of this fundamental operator-function are revealed.

Keywords: Banach space; generalized function; fundamental operator-function; Jordan set

For citation: Grazhdantseva E.Yu. Fundamental'naya operator-funktsiya integro-differentsial'nogo operatora s proizvodnymi ot funktsionalov v banakhovykh prostranstvakh [Fundamental operator-function of an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 249–262. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Интерес к дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям вызван задачами математической физики в областях гидродинамики, электротехники, физики плазмы и т. п. Особенность таких задач заключается в том, что в главной части уравнения присутствует необратимый (вырожденный) оператор.

Благодаря свойствам функции Дирака (функция $\delta(t)$) и функции Хевисайда (функция $\theta(t)$) дифференциальное (или интегро-дифференциальное) уравнение можно представить в виде свертки соответствующего уравнению обобщенного дифференциального оператора с неизвестной функцией. Например, дифференциальное уравнение

$$B\frac{du}{dt} + Au = f,$$

где $u = u(t)$ — неизвестная функция, а $f = f(t)$ — известная функция, представимо в виде

$$(B\delta^{'}(t) + A\delta(t)) * u(t) = f(t).$$

Один из методов решения подобных уравнений заключается в применении развивающейся теории фундаментальных оператор-функций (см., например, [1–3]). Исследование фундаментальной оператор-функции для соответствующего уравнению оператора позволяет выявить условия существования как непрерывного, так и обобщенного решения исследуемого уравнения, а также восстановить само решение.

В работе рассматривается обобщенный интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов вида

$$L^N = \sum_{l=1}^{s} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t), \tag{0.1}$$

где A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2; a_l, $l = \overline{1,s}$, — элементы пространства E_2; α_l, $l = \overline{1,s}$, — элементы банахова пространства E_1^*; $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2; $K(t)$ — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(K)} = E_1$, $D(K)$ не зависит от t и $K(t)$ — сильно непрерывная на $D(K)$ достаточно гладкая функция; $\delta(t)$ — функция Дирака; $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Этот оператор соответствует интегро-дифференциальному уравнению с производными от функционалов вида

$$\sum_{l=1}^{s} \left\langle u^{(N)}(t), \alpha_l \right\rangle a_l = Au(t) + \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau + f(t).$$

1. Вспомогательные сведения и обозначения

О п р е д е л е н и е 1.1. [1] Обобщенной функцией (распределением) со значениями в банаховом пространстве называют всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(R^N; E^*)$.

При этом множество всех обобщенных функций, определенных на основном пространстве обозначают через $K'(E)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. [2] Действием оператор-функции $K(t) \in L(E_1, E_2)$, здесь $L(E_1, E_2)$ — пространство сильно непрерывных оператор-функций класса C^∞, на обобщенную функцию $v(t) \in K'(E_1)$, называют обобщенную функцию $K(t)v(t) \in K'(E_2)$, действующую на основные функции $s(t) \in K(E_2^*)$ по правилу

$$(K(t)v(t), s(t)) = (v(t), K^*(t)s(t)).$$

О п р е д е л е н и е 1.3. [2] Сверткой обобщенной оператор-функции $K(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in K_+^{'}(E_1)$ называют обобщенную функцию $K(t)f(t) * v(t) \in K_+^{'}(E_2)$, действующую по формуле

$$(K(t)f(t) * v(t), s(t)) = (f(t), (K^*(t)s(t+y))), \ \ \forall s(t) \in K(E_2^*).$$

З а м е ч а н и е 1.1. $K(t)\theta(t) * b(t)\theta(t) = (K(t) * b(t))\theta(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, используя определение свертки, получим

$$(K(t)\theta(t) * b(t)\theta(t), \varphi(t)) = (K(t)\theta(t), (b(y)\theta(y), \varphi(t+y))) =$$
$$= (K(t)\theta(t), \int_0^\infty b(y)\varphi(t+y)dy) = (K(t)\theta(t), \int_0^\infty b(x-t)\varphi(x)dx) =$$
$$= \int_0^\infty K(t)\left(\int_t^\infty b(x-t)\varphi(x)dx\right)dt = \int_0^\infty \left(\int_0^x K(t)b(x-t)dt\right)\varphi(x)dx =$$
$$= \int_0^\infty (K(x) * b(x))\varphi(x)dx = (\theta(x), (K(x) * b(x))\varphi(x)) =$$
$$= ((K(x) * b(x))\theta(x), \varphi(x)) = ((K(t) * b(t))\theta(t), \varphi(t)).$$

□

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть $K(t) \in C^k(E)$. Тогда дифференцирование оператор-функции $K(t)\theta(t)$ происходит по правилу

$$(K(t)\theta(t))^{(k)} = K^{(k)}(t)\theta(t) + \sum_{m=0}^{k-1} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $a(t) \in C^{'}(E)$ и $\theta(t)$ — функция Хевисайда, то производная произведения $a(t)\theta(t)$ находится по формуле (см., например, [2]) $(a(t)\theta(t))^{'} = a^{'}(t)\theta(t) + a(0)\delta(t)$. Тогда для произведения $K(t)\theta(t)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(K(t)\theta(t))^{'} = K^{'}(t)\theta(t) + K(0)\delta(t),$$

$$(K(t)\theta(t))'' = (K'(t)\theta(t) + K(0)\delta(t))' = K''(t)\theta(t) + K'(0)\delta(t) + K(0)\delta'(t) =$$
$$= K''(t)\theta(t) + \sum_{m}^{1} K^{(m)}(0)\delta^{(1-m)},$$
$$(K(t)\theta(t))^{(3)} = (K''(t)\theta(t) + K'(0)\delta(t) + K(0)\delta'(t))' =$$
$$= K^{(3)}(t)\theta(t) + K''(0)\delta(t) + K'(0)\delta'(t) + K(0)\delta'' = K^{(3)}(t)\theta(t) + \sum_{m}^{2} K^{(m)}(0)\delta^{(2-m)},$$

и т. д. По индукции получим

$$(K(t)\theta(t))^{(k)} = K^{(k)}(t)\theta(t) + \sum_{m=0}^{k-1} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t).$$

□

З а м е ч а н и е 1.3. $(U(\Gamma t))^{(N)} = \Gamma U(\Gamma t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $U(\Gamma t) = \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma \frac{t^{qN-1}}{(qN-1)!}$, получим

$$(U(\Gamma t))^{(N)} = \left(I\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \Gamma\frac{t^{2N-1}}{(2N-1)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-1}}{(3N-1)!} + \cdots \right)^{(N)} =$$
$$= \left(I\frac{t^{N-2}}{(N-2)!} + \Gamma\frac{t^{2N-2}}{(2N-2)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-2}}{(3N-2)!} + \cdots \right)^{(N-1)} =$$
$$= \left(I\frac{t^{N-3}}{(N-3)!} + \Gamma\frac{t^{2N-3}}{(2N-3)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-3}}{(3N-3)!} + \cdots \right)^{(N-2)} = \cdots =$$
$$= \left(I + \Gamma\frac{t^{N}}{(N)!} + \Gamma^2\frac{t^{2N}}{(2N)!} + \cdots \right)' =$$
$$= \left(\Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \Gamma^2\frac{t^{2N-1}}{(2N-1)!} + \cdots \right) = \Gamma\sum_{q=1}^{\infty}\frac{t^{qN-1}}{(qN-1)!} = \Gamma U(\Gamma t).$$

□

О п р е д е л е н и е 1.4. [2] Фундаментальной оператор-функцией оператора L на классе K'_+ называют обобщенную оператор-функцию $E(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$L * E(t) * u(t) = u(t), \ \ \forall u(t) \in K'_+(E_2),$$
$$E(t) * L * w(t) = w(t), \ \ \forall w(t) \in K'_+(E_1).$$

где $K'_+(E)$ — пространство обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве с ограниченным слева носителем.

Пусть

1) оператор B — это матрица размерности $(n\times n)$ вида

$$B=\begin{pmatrix}\langle A^{-1}a_1,\alpha_1\rangle & \dots & \langle A^{-1}a_n,\alpha_1\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle A^{-1}a_1,\alpha_n\rangle & \dots & \langle A^{-1}a_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix};$$

2) тождественный оператор I — единичная матрица размерности $n\times n$;

3) набор $\{\varphi_i, i=\overline{1,n}\}$ — базис пространство нулей оператора B; $\varphi_i\in E_1$;

4) набор $\{\psi_i, i=\overline{1,n}\}$ — базис пространства нулей оператора B^*; $\psi_i\in E_2$;

5) элементы $\{\varphi_i^{(j)}, i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\}$ — полный I-жорданов набор оператора B;

6) элементы $\{\psi_i^{(j)}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,p_i}\}$ — полный I^*- жорданов набор оператора B^*;

7) операторы I^* и B^* — сопряженные операторы для операторов I и B соответственно;

8) оператор Треногина–Шмидта Γ для оператора B — матрица, определяемая по формуле

$$\Gamma=\left(B+\sum_{i=1}^{n}\langle\bullet,\gamma_i\rangle\, z_i\right)^{-1},$$

где $\gamma_i\in E_1^*$, $i=\overline{1,n}$, $z_i\in E_2$, $i=\overline{1,n}$ — биортогональные системы элементов для φ_i и ψ_i соответственно [4];

9) оператор $\tilde{Q}$ — матрица размерности $(n\times n)$, у которой элементы $\tilde{Q}_{pq}$, $p=\overline{1,n}$, $q=\overline{1,n}$, находятся по формуле

$$\tilde{Q}_{pq}=\begin{cases}0, & p\neq q,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\left\langle\bullet,\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}, & p=q;\end{cases}$$

10) оператор-функция $\Gamma e^{\Gamma t}$ определяется по формуле

$$\Gamma e^{\Gamma t}=\Gamma\sum_{q=1}^{\infty}\Gamma\frac{t^{q-1}}{(q-1)!}.$$

Введем в рассмотрение оператор-функции

$$H(t)=A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*b_l(t))\theta(t)a_l+A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l-$$
$$-A^{-1}K(t)\theta(t)-A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{(k+1)}(t)\theta(t)a_l \tag{1.1}$$

и

$$\tilde{H}(t)=A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(b_l(t))*K(t)\theta(t)a_l+A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l-$$
$$-A^{-1}K(t)\theta(t)-A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{(k+1)}(t)\theta(t)a_l, \tag{1.2}$$

где b_l — элементы вектор-столбца $\vec{b}(t) = \Gamma^2 e^{\Gamma t}(I-\tilde{Q})\vec{d}$; h_l — элементы вектор-столбца $\vec{h} = \Gamma(I-\tilde{Q})\vec{d}$; $f_l = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{p_i-k+1-j}\Big)d_l,$ — элементы вектор-столбца $\vec{f}$; $d_l = \langle A^{-1}\bullet, \alpha_l\rangle,$ — элементы вектор-столбца $\vec{d}$; $l=\overline{1,n}$. Также введем резольвенты $R(t)$ и $\tilde{R}(t)$, для которых оператор-функции (1.1) и (1.2) являются ядрами соответственно.

2. Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными первого порядка от функционалов

Пусть $K(t)\equiv 0$, $N=1$. Тогда оператор (0.1) примет вид

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle\, a_l\delta^{'}(t) - A\delta(t).$$

Фундаментальной оператор-функцией этого оператора при обратимости оператора A является оператор-функция вида (см. [3, с. 78])

$$M(t) = A^{-1}\sum_{i=1}^{n} c_i^{'}(t)a_i - A^{-1}\delta(t),$$

где $c_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ — элементы обобщенной вектор-функции $\vec{c}(t) = U_1(t)*\vec{g}(t)$,

$$U_1(t) = \Gamma e^{\Gamma t}(I-\tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{j}\rangle\,\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(k)}(t),\quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix}\langle\bullet, \alpha_1\rangle\\ \cdots\\ \langle\bullet, \alpha_n\rangle\end{pmatrix}A^{-1}\delta(t),$$

операторы $\Gamma, B, \tilde{Q}$, а также наборы $\left\{\varphi_i^{(j)},\, i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,p_i}\right\}$, $\left\{\psi_i^{(j)},\, i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,p_i}\right\}$ описаны выше (пункт 1.). Учитывая введенные обозначения, оператор-функция $M(t)$ записывается в виде

$$M(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n} b_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\delta^{(k+1)}(t) - A^{-1}\delta(t).$$

Лемма 2.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям*

$$K^{(m)}(0) = 0,\quad m=0,1,\ldots,p,\quad p = \max_{i=\overline{1,n}}(p_i). \tag{2.1}$$

Тогда оператор-функция $H(t)$ вида (1.1) может быть представлена в виде

$$H(t) = K(t)\theta(t) * M(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1), для оператор-функции $H(t)$ вида (1.2) справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*b_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l K(t)\theta(t)a_l - A^{-1}K(t)\theta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l K^{(k+1)}\theta(t)a_l =$$

$$= A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)\theta(t)) * (b_l(t)\theta(t))a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l(K(t)\theta(t)) * \delta(t)a_l -$$
$$-A^{-1}(K(t)\theta(t)) * \delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\left(K^{(k+1)}\theta(t) + \sum_{m=0}^{k} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t)\right)a_l.$$

А, согласно свойству дифференцирования произведения непрерывной функции с функцией Хевисайда (см. замечания 1.1, 1.2), получившееся представление оператор-функции $H(t)$ можно записать в виде

$$K(t)\theta(t) * \left(A^{-1}\sum_{l=1}^{n} b_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\delta^{(k+1)}(t))a_l\right) =$$
$$= K(t)\theta(t) * M(t).$$

Таким образом, действительно $H(t) = K(t)\theta(t) * M(t)$. □

Лемма 2.2. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1). Тогда оператор-функция $\tilde{H}(t)$ вида (1.2) может быть представлена в виде*

$$\tilde{H}(t) = M(t) * K(t)\theta(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.1. □

Теорема 2.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1). Тогда интегро-дифференциальный оператор вида*

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet,\alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$$

на классе K'_+ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$E(t) = M(t) * (R(t) + I\delta(t)) = (\tilde{R}(t) + I\delta(t)) * M(t),$$

где $M(t)$ — фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet,\alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t),$$

$R(t)$ — резольвента ядра $H(t)$ вида (1.1), $\tilde{R}(t)$ — резольвента ядра $\tilde{H}(t)$ вида (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая введенные обозначения и вид интегро-дифференциального оператора L, для свертки $L * E(t)$ при $E(t) = M(t) * (R(t) + I\delta(t))$, согласно лемме 2.1, получим:

$$L * E(t) = L * (M(t) * (R(t) + I\delta(t))) =$$
$$= \Big(\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet,\alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t)\Big) * M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) -$$
$$-K(t)\theta(t) * M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) = I\delta(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) - R(t) = I\delta(t).$$

А в силу леммы 2.2 для свертки $E(t) * L$ получим:

$$E(t) * L = M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * L =$$
$$= M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)\Big) =$$
$$= M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t)\Big) - M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * K(t)\theta(t) =$$
$$= \big(\tilde{R}(t) + I\delta(t)\big) * M(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t)\Big) - \tilde{R}(t) =$$
$$= \big(\tilde{R}(t) + I\delta(t)\big) * I\delta(t) - \tilde{R}(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, доказано, что оператор-функция $E(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, а именно $L * E(t) * u(t) = u(t)$, $\forall u(t) \in K'_+(E_2)$, $E(t) * L * w(t) = w(t)$, $\forall w(t) \in K'_+(E_1)$. □

3. Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными высокого порядка от функционалов

Рассмотрим интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов высокого порядка вида

$$L^{(N)} = \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t).$$

Здесь, как и ранее, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2; $a_l \in E_2$, $\alpha_l \in E_1$, $l = \overline{1,n}$; $K(t)$ — непрерывная функция, осуществляющая отображение $R_+ \to R$; $\delta(t)$ — функция Дирака; $\theta(t)$ — функция Хевисайда; кроме того, оператор A является обратимым.

Теорема 3.1. *Дифференциальный оператор* $S = \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^N(t) - A\delta(t)$ *на классе* K'_+ *имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$W(t) = A^{-1} \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l - A^{-1}\delta(t),$$

где c_l $(l = \overline{1,n}\,)$ *— элементы вектор-функции* $\vec{c}(t)$, *которая является решением дифференциального уравнения* $B\vec{c}^{(N)}(t) - \vec{c}(t) = \vec{g}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно представлению решения дифференциального уравнения посредством фундаментальной оператор-функции соответствующего уравнению дифференциального оператора (см., например, [5]), вектор-функция $\vec{c}(t)$ имеет вид $\vec{c}(t) = V(t) * \vec{g}(t)$, где функция $V(t)$ является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $B\delta^N(t) - I\delta(t)$. Известно (см. [3]), что такой дифференциальный оператор имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$V(t) = \Gamma\, U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{p_i-k+1-j}\Big)\delta^{(kN)}(t).$$

Здесь $U(\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty}\Gamma^{i-1}\dfrac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$, а операторы $\tilde{Q}, \Gamma$, наборы $\Big\{\psi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\Big\}$ и $\Big\{\varphi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\Big\}$ введены в пункте 1.).

Найдем вектор-функцию $\vec{c}(t)$. Так как $\vec{c}(t) = V(t) * \vec{g}(t)$, получим

$$\vec{c}(t) = \Big(\Gamma U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\delta^{(kN)}(t)\Big) * \vec{d}\delta^{(N)}(t) =$$

$$= \Gamma U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t) * \vec{d}\delta^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\delta^{(kN)}(t) * \vec{d}\delta^{(N)}(t).$$

Используя свойства свертки обобщенных функций и дифференцирования обобщенных функций, получаем искомую вектор-функцию в виде

$$\vec{c}(t) = (\Gamma U(\Gamma t))^{(N)}(I - \tilde{Q})\theta(t)\vec{d} + (I - \tilde{Q})\theta(t)\vec{d} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\vec{d}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Далее, поскольку $(U(\Gamma t))^{(k)} = \Gamma U(\Gamma t)$ (см. замечание 1.3), получим

$$\vec{c}(t) = \Gamma^2 U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t)\vec{d} + (I - \tilde{Q})\theta(t)\vec{d} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\vec{d}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Аналогично вектор-функции $\vec{b}(t)$ (см. пункт 1.) введем в рассмотрение вектор-функцию $\vec{e}(t) = \Gamma^2 U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t)\vec{d}$, элементы которой будем обозначать как $e_l(t)$, $l = \overline{1,n}$. Тогда, используя определенные ранее (пункт 2.) векторы $\vec{h}$ и $\vec{f}$, получим

$$\vec{c}(t) = \vec{e}(t)\theta(t) + \vec{h}\theta(t) - \vec{f}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Чтобы убедиться в том, что оператор-функция $W(t)$ является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора S, достаточно проверить выполнимость равенства $S * W(t) = W(t) * S = I\delta(t)$. Учитывая вид дифференциального оператора S и вид оператор-функции $W(t)$, получим

$$S * W(t) = \Big(\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle a_l\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) * W(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle a_l\delta^{(N)}(t) * W(t) - A\delta(t) * W(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) - A\delta(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - a^{-1}\delta(t) \Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left\langle A^{-1} c_r^{(N)} a_r, \alpha_l \right\rangle a_l - \sum_{l=1}^{n} \left\langle A^{-1}\bullet, \alpha_l \right\rangle \delta^{(N)}(t) a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left\langle B \begin{pmatrix} c_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(N)}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \alpha_l \right\rangle a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) = I\delta(t).$$

Итак, $S * W(t) = I\delta(t)$.

С другой стороны,

$$W(t) * S = W(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) \Big) =$$

$$= W(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) W(t) * - A\delta(t) \Big) =$$

$$= \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) * A\delta(t) =$$

$$= A^{-1} \sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)} - A^{-1}\delta(t) * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta(t) -$$

$$- A^{-1} \sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r * \delta(t) + A^{-1}\delta(t) * A\delta(t) =$$

$$= A^{-1}\delta(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_r^{(N)}(t) a_r * \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l A^{-1}\delta(t) - \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l A^{-1}\delta^{(N)}(t) -$$

$$- \sum_{r=1} n c_r(t) a_r \Big) * A\delta(t) + I\delta(t) =$$

$$= A^{-1}\delta(t) * \left(\sum_{l=1}^{n} \left(B \begin{pmatrix} c_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(N)}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \right) - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) \right) a_l * A\delta(t) + I\delta(t) =$$

$$= A^{-1} \Big(\sum_{l=1}^{n} c_l(t) - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) \Big) a_l A\delta(t) + I\delta(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, оператор-функция $W(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции для дифференциального оператора S и, следовательно, является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора N-го порядка $S = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)$ в случае обратимости оператора A. $\square$

Аналогично оператор-функциям $H(t)$ и $\tilde{H}(t)$ (см. пункт 2.) определим оператор-функции

$$H_1(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*e_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}k(t)\theta(t)- \\ - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{((k+1)N)}(t)\theta(t)a_l, \quad (3.1)$$

$$\tilde{H}_1(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(e_l(t)*K(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}k(t)\theta(t)- \\ - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{((k+1)N)}(t)\theta(t)a_l, \quad (3.2)$$

где функции $e_l(t)$, $l=\overline{1,n}$, являются элементами введенной при доказательстве теоремы 3.1 вектор-функции $\vec{e}(t.)$

Лемма 3.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условию*

$$K^{(m)}(0)=0, \quad m=0,1,\ldots,pN-1, \quad p=\max_{i=\overline{1,n}}(p_i), \quad N\geq 2. \quad (3.3)$$

Тогда оператор-функция $H_1(t)$ вида (3.1) представима в виде

$$H_1(t) = K(t)\theta(t)*W(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (3.3), то для оператор-функции $H_1(t)$ вида (3.1) выполнено:

$$A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*e_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}K(t)\theta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{(k+1)}\theta(t)a_l = \\ = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)\theta(t))*(e_l(t)\theta(t))a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_l(K(t)\theta(t))*\delta(t)a_l- \\ -A^{-1}(K(t)\theta(t))*\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_l\Big(K^{(k+1)}\theta(t) + \sum_{m=0}^{(k+1)N-1}K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t)\Big)a_l.$$

А, согласно свойству дифференцирования произведения непрерывной функции и функции Хевисайда (см. замечание 1.1, 1.2), получившееся представление оператор-функции $H_1(t)$ можно записать в виде

$$K(t)\theta(t)*\Big(A^{-1}\sum_{l=1}^{n}e_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_l\delta^{(k+1)N}(t))a_l\Big) = \\ = K(t)\theta(t)*W(t).$$

Таким образом, действительно, справедливо равенство $H(t) = K(t)\theta(t)*W(t)$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условию (3.3). Тогда оператор-функция $\tilde{H}_1(t)$ вида (3.2) представима в виде*

$$\tilde{H}_1(t) = W(t) * K(t)\theta(t).$$

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1. □

Теорема 3.2. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условию (3.3). Тогда интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов высокого порядка $L^{(N)} = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle\, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$ на классе K'_+ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E_1(t) = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) = \big(\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)\big) * V(t),$$

где функция $V(t)$ является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора высокого порядка вида $B\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)$, $R_1(t)$ является резольвентой ядра $H_1(t)$ вида (3.1), $\tilde{R}_1(t)$ является резольвентой ядра $\tilde{H}_1(t)$ вида (3.2).

Доказательство. Используя введенные обозначения и вид интегро-дифференциального оператора $L^{(N)}$ для свертки $L^{(N)} * E(t)$ при $E_1(t) = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big)$, согласно лемме 3.1, получим:

$$L^{(N)} * E_1(t) = L^{(N)} * \big(V(t) * (R_1(t) + I\delta(t))\big) =$$

$$= \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) * V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) - K(t)\theta(t) * V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) =$$

$$= I\delta(t) * (R_1(t) + I\delta(t)) - R_1(t) = I\delta(t).$$

А согласно лемме 3.2 для свертки $E_1(t) * L^{(N)}$ получим:

$$E_1(t) * L^{(N)} = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * L^{(N)} =$$

$$= V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)\Big) =$$

$$= V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) - V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * K(t)\theta(t) =$$

$$= (\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)) * V(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) - \tilde{R}_1(t) =$$

$$= \big(\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)\big) * I\delta(t) - \tilde{R}_1(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, доказано, что оператор-функция $E_1(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, а именно $L^{(N)} * E_1(t) * u(t) = u(t)$, $\forall u(t) \in K'_+(E_2)$, $E_1(t) * L^{(N)} * w(t) = w(t)$, $\forall w(t) \in K'_+(E_1)$. □

З а м е ч а н и е 3.1. Аналогично [1], условия (3.3) в теореме 3.2 можно заменить на одно из следующих условий:

1. $\varphi_i^{(j)} \in N(K^{(m)}(0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN - 1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1;$

2. $\psi_i^{(j)} \in R^{\perp}(K^{(m)}(0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN - 1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1;$

3. $\psi_i^{(j)} \in N(K^{*(m)}0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN - 1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, условия (3.3) влияют только на сингулярную составляющую сверток

$$K(t)\theta(t) * W(t), \quad W(t) * K(t)\theta(t), \quad K(t)\theta(t) * M(t), \quad M(t) * K(t)\theta(t),$$

которая имеет вид

$$\sum_{l=1}^{n} f_l \Big(\sum_{m=0}^{(k+1)N-1} K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t) \Big) a_l,$$

или учитывая структуру элементов $f_l,\ \ l = \overline{1,n}$ (см. пункт 2.), вид

$$\sum_{l=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=0}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \bullet, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \Big] \langle A^{-1}\bullet, \alpha_l \rangle \Big) \sum_{m=0}^{(k+1)N-1} K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t) a_l.$$

Остается заметить, что условия (3.3) обеспечивают равенство нулю этого сингулярного выражения, для чего достаточно выполнения любого из приведенных условий. □

References

[1] М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева, “Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором в главной части в банаховых пространствах”, *Сибирский математический журнал*, **46**:6 (2005), 1393–1406; англ. пер.:M. V. Falaleev, E. Yu. Grazhdantseva, “Fundamental operator-functions of degenerate differential and differential-difference operators with Noetherian operator in the main part in Banach spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[2] М. В. Фалалеев, “Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах”, *Сибирский математический журнал*, **41**:5 (2000), 1167–1182; англ. пер.:M. V. Falaleev, “Fundamental operator-functions of singular differential operators in Banach spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **41**:5 (2000), 1167–1182.

[3] Е. Ю. Гражданцева, *Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах*, Изд-во ИГУ, Иркутск, 2013. [E. Yu. Grazhdantseva, *Fundamental‘nie operator-funkcii virogdennih differencial‘nih operatorov visokogo poriadka v banahovih prostranstvah*, Izdatelstvo ISU, Irkutsk, 2013 (In Russian)].

[4] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969; англ. пер.:M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations Hardcover*. V. I, Wolters-Noordhoff B.V., Great Britain, 1974.

[5] M. V. Falaleev, "Generalized Solution of Integro-Differential Equations of the Viscoelasticity Theory", *International Conference on Applied Science and Engineering-Proceeding*, 2018, 42–45.

Информация об авторе

Гражданцева Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Поступила в редакцию 31.07.2020
Поступила после рецензирования 02.09.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Elena Yu. Grazhdantseva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department. Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Received 31.07.2020
Reviewed 02.09.2020
Accepted for press 09.09.2020